РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 539.37+539.214

Чигиринский В. В.
Шейко С. П.
Ечин С. М.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Необходимость аналитического решения пространственной задачи теории пластичности очевидна. В общем виде напряжённое и деформированное состояние металла в каждой точке очага деформации разное. Это приводит к неоднородности физических и механических свойств металла, неоднозначности определения силовых параметров процесса, расхода энергии. Появились работы, показывающие влияние пластической деформации на структурно-фазовые превращения в металле. В этой связи определение напряжённого состояния в каждой точке очага деформации является актуальной проблемой.

На базе метода гармонических функций [1–5] разрабатываются подходы решения пространственной задачи теории пластичности. Это связано с тем, что в решениях учитываются, по напряжениям и деформациям, переходы из одной зоны пластического течения в смежную. Данные переходы определяются гармоническими сложными функциями, в состав которых входят тригонометрические зависимости от координат очага деформации. Анализ показывает, что в постановочной части задачи должны присутствовать дифференциальные уравнения, определяющие в решении такие переходы. Это обобщённые уравнения равновесия по разным направлениям, в которых разрешающей функцией являются касательные напряжения

Задача ставится и решается в замкнутом виде, с учётом кинематических условий. С целью упрощения анализа принимаем $\tau_{xy} = 0$. Во многих решениях задач обработки металлов давлением влиянием данного компонента тензора напряжений пренебрегают [6], [7].

Целью работы является разработка математической модели процесса объёмной пластической деформации.

На рис. 1 показан в плане очаг деформации и рассматриваемые касательные напряжения. Предполагается, что вдоль оси X действуют только касательные напряжения τ_{xz}, а вдоль оси Y напряжения τ_{yz}.

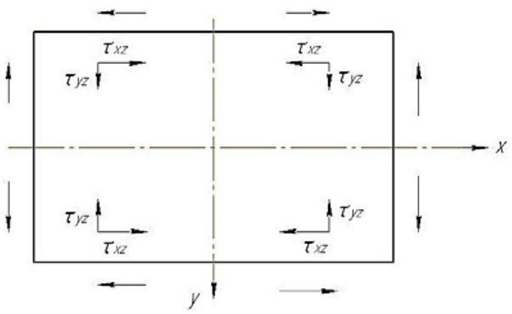

Рис. 1. Схема действия касательных напряжений в плане для пространственной задачи

Допускается, что вдоль осей X и Y имеет место плоскодеформированное состояние. Тогда, для оси $X - \tau_{yz} = 0$, оси $Y - \tau_{xz} = 0$. Данный фактор должен быть учтен при постановке задачи. Стрелками по контуру показано течение металла вдоль осей X и Y. На осях изменяется направление течения металла, следовательно, знак касательных напряжений. В соответствии с выше сказанным имеет место следующая постановка задачи.

1. Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

2. Обобщенные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} 2k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xz}}{k_1}\right)^2}; \quad \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} 2k_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{yz}}{k_2}\right)^2}. \tag{2}$$

3. Уравнения связи:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2\tau_{xz}} = \frac{\xi_x - \xi_z}{\dot{\gamma}_{xz}} = \frac{2\xi_x + \xi_y}{\dot{\gamma}_{xz}}; \quad \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2\tau_{yz}} = \frac{\xi_y - \xi_z}{\dot{\gamma}_{yz}} = \frac{2\xi_y + \xi_x}{\dot{\gamma}_{yz}}. \tag{3}$$

4. Уравнение несжимаемости:

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0. \tag{4}$$

5. Уравнения неразрывности скоростей деформаций:

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{zx}}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{zy}}{\partial z \partial y}, \tag{5}$$

6. Граничные условия:

$$\tau_{n1} = k_1 \cdot Sin(\text{A}_1 \Phi_1 - 2\alpha_1), \; \tau_{n2} = k_2 \cdot Sin(\text{A}_2 \Phi_2 - 2\alpha_2), \tag{6}$$

Решение плоских задач в аналитическом виде представлено в работах [1–5]. Для удовлетворения граничных условий вида (6) необходимо:

$$\tau_{xz} = k_1 \cdot Sin \text{A}_1 \Phi_1, \quad \tau_{yz} = k_2 \cdot Sin \text{A}_2 \Phi_2, \tag{7}$$

где A_1 и A_2 – постоянные, определяющие параметры пластической среды;

Φ_1 и Φ_2 – неизвестные координатные функции, определяемые решением задачи;

k_1, k_2 – сопротивление пластической деформации сдвига вдоль осей X и Y и, зависящие от координат очага деформации.

Следующей особенностью решения уравнений (2) – это использование фундаментальной функции. Она применяется, если дифференциальное уравнение в частных производных является линейным [8]. Из этого следует:

$$k_1 = C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1', \qquad k_2 = C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2', \tag{8}$$

где $C_{\sigma 1}$ и $C_{\sigma 2}$ – постоянные, определяющие размерность сопротивления сдвигу в направлениях осей X и Y;

θ_1 и θ_2 – координатные неизвестные функции, определяемые решением задачи вдоль осей X и Y. При этом необходимо иметь в виду, что $\tau_{xz} = f(x,z)$, $\tau_{yz} = f(y,z)$.

Подставляя зависимости (7) и (8) в (2), получим следующее:

$$\cdot C_{\sigma 1}\left[\theta'_{1xx}+(\theta'_{1x}+\mathrm{A}_1\Phi_{1z})^2-\theta'_{1zz}-(\theta'_{1z}-\mathrm{A}_1\Phi_{1x})^2\right]\cdot Sin\mathrm{A}_1\Phi_1+$$
$$+C_{\sigma 1}\left[2\cdot(\mathrm{A}_1\Phi_{1x}-\theta'_{1z})\cdot(\theta'_{1x}+\mathrm{A}_1\Phi_{1z})+(\mathrm{A}_1\Phi_{1xx}-\mathrm{A}_1\Phi_{1zz})\right]\cdot Cos\mathrm{A}_1\Phi_1=$$
$$=-2\cdot C_{\sigma 1}\cdot \mathrm{A}_1\Phi_{1xz}\cdot Sin\mathrm{A}_1\Phi_1+2\cdot C_{\sigma 1}\cdot\theta'_{1xz}\cdot Cos\mathrm{A}_1\Phi_1. \quad (9)$$

Принимаем скобки $(\theta'_{1x}+\mathrm{A}_1\Phi_{1z})$ и $(\theta'_{1z}-\mathrm{A}_1\Phi_{1x})$ в операторах тригонометрических функций (9) равными нулю. В этом случае избавляемся от нелинейности, получаем соотношения Коши-Римана, которые превращают уравнения в тождество. Имеем:

$$\theta'_{1x}=-\mathrm{A}_1\Phi_{1z},\ \ \theta'_{1z}=\mathrm{A}_1\Phi_{1x}. \quad (10)$$

Из соотношений (10) определяются функции θ'_1 и $\mathrm{A}_1\Phi_1$. Они гармонические и удовлетворяют уравнению Лапласа.

Аналогичные преобразования имеют место и для второго обобщенного уравнения равновесия при подстановке (7) и (8) в (2).

При этом:

$$\theta'_{2y}=-\mathrm{A}_2\Phi_{2z},\ \ \theta'_{2z}=\mathrm{A}_2\Phi_{2y}. \quad (11)$$

Выражения для касательных напряжений можно использовать для определения нормальных напряжений. После разделения переменных и интегрирования дифференциальных уравнений равновесия получим:

$$\sigma_x=C_{\sigma 1}\cdot\exp\theta'_1\cdot Cos\mathrm{A}_1\Phi_1+\sigma+f(y,z)+C_1;\ \sigma_y=C_{\sigma 2}\cdot\exp\theta'_2\cdot Cos\mathrm{A}_2\Phi_2+\sigma+f(x,z)+C_2.$$
$$\sigma_z=-\left(C_{\sigma 1}\cdot\exp\theta'_1\cdot Cos\mathrm{A}_1\Phi_1+C_{\sigma 2}\cdot\exp\theta'_2\cdot Cos\mathrm{A}_2\Phi_2\right)+\sigma+f(x,y)+C_3,$$
$$\tau_{xz}=C_{\sigma 1}\cdot\exp\theta'_1\cdot Sin\mathrm{A}_1\Phi_1;\ \tau_{yz}=C_{\sigma 2}\cdot\exp\theta'_2\cdot Sin\mathrm{A}_2\Phi_2, \quad (12)$$

при

$$\theta'_{1x}=-\mathrm{A}_1\Phi_{1y},\ \ \theta'_{1y}=\mathrm{A}_1\Phi_{1x};\ \ \theta'_{1xx}+\theta'_{1zz}=0,\ \mathrm{A}_1\Phi_{1xx}+\mathrm{A}_1\Phi_{1zz}=0.$$
$$\theta'_{2y}=-\mathrm{A}_2\Phi_{2z},\ \ \theta'_{2y}=\mathrm{A}_2\Phi_{2x};\ \ \theta'_{2yy}+\theta'_{2zz}=0,\ \mathrm{A}_2\Phi_{2yy}+\mathrm{A}_2\Phi_{2zz}=0.$$

После подстановки граничных условий в (12) определяем постоянные интегрирования:

$$C_{\sigma 1}=\frac{k_0}{2\cdot\exp\theta'_{10}\cdot Cos\mathrm{A}_1\Phi_{10}};\quad C_{\sigma 1}=\frac{k_0}{2\cdot\exp\theta'_{10}\cdot Cos\mathrm{A}_1\Phi_{10}};$$

$$\mathrm{A}_1\Phi_{10}=\mathrm{A}_1\mathrm{A}_6\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{h}{2};\quad \mathrm{A}_2\Phi_{20}=\mathrm{A}_2\mathrm{A}_7\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{h}{2};\quad \mathrm{A}_1\mathrm{A}_6=4\frac{\mathrm{A}_1\Phi_{10}}{lh};\quad \mathrm{A}_2\mathrm{A}_7=4\frac{\mathrm{A}_2\Phi_{20}}{bh}.$$

Переходя к боковой точке на контактной поверхности, запишем:

$$k_0\psi_1=k_0\frac{Sin\mathrm{A}_1\Phi_{10}}{Cos\mathrm{A}_1\Phi_{10}},\qquad k_0\psi_2=k_0\frac{Sin\mathrm{A}_2\Phi_{20}}{Cos\mathrm{A}_2\Phi_{20}},$$

или $\mathrm{A}_1\Phi_{10}=arctg\psi_1,\quad \mathrm{A}_2\Phi_{20}=arctg\psi_2.$

При этом:

$$\theta_{10}' = -2\cdot\frac{A_1\Phi_{10}}{l\cdot h}\cdot\left(\frac{l^2}{4}-\frac{h^2}{4}\right), \quad \theta_2' = -2\cdot\frac{A_2\Phi_{20}}{b\cdot h}\cdot\left(\frac{b^2}{4}-\frac{h^2}{4}\right).$$

С учётом подстановки и преобразований получим:

$$\sigma_x = -\frac{k_0}{2\cdot Cos A_1\Phi_{10}}\cdot\exp\left(\theta_1'-\theta_{10}'\right)\cdot Cos A_1\Phi_1 + \frac{k_0}{2},$$

$$\sigma_y = -\frac{k_0}{2\cdot Cos A_2\Phi_{20}}\cdot\exp\left(\theta_2'-\theta_{20}'\right)\cdot Cos A_2\Phi_2 + \frac{k_0}{2},$$

$$\sigma_z = -\left(\frac{3k_0}{2\cdot Cos A_1\Phi_{10}}\exp\left(\theta_1'-\theta_{10}'\right)Cos A_1\Phi_1 + \cdot\frac{3k_0}{2\cdot Cos A_2\Phi_{20}}\exp\left(\theta_2'-\theta_{20}'\right)Cos A_2\Phi_2\right) + +k_0. \quad (13)$$

Одним из вариантов решения уравнения Лапласа являются выражения:

$$A_1\Phi_1 = A_1A_6\cdot x\cdot z, \quad A_2\Phi_2 = A_2A_7\cdot y\cdot z,$$

$$\theta_1' = -\frac{1}{2}\cdot A_1A_6\cdot\left(x^2-z^2\right), \quad \theta_2' = -\frac{1}{2}\cdot A_2A_7\cdot\left(x^2-z^2\right).$$

При таких подходах решается и деформационная задача теории пластичности, соответствие которой с решениями по напряжениям свидетельствует об одном из действительных решений пространственной задачи:

$$\xi_x = C_{\xi1}\cdot\exp\theta_1''\cdot Cos B_1\Phi_1, \; \xi_y = C_{\xi2}\cdot\exp\theta_2''\cdot Cos B_2\Phi_2,$$

$$\xi_z = -\left(C_{\xi1}\cdot\exp\theta_1''\cdot Cos A_1\Phi_1 + C_{\xi2}\cdot\exp\theta_2''\cdot Cos A_2\Phi_2\right),$$

$$\gamma_{xz} = 2\cdot C_{\xi1}\cdot\exp\theta_1''\cdot Sin B_1\Phi_1, \; \gamma_{yz} = 2\cdot C_{\xi2}\cdot\exp\theta_2''\cdot Sin B_2\Phi_2,$$

при $\theta_{1x}'' = -B_1\Phi_{1z}$, $\theta_{1z}'' = B_1\Phi_{1x}$, $\theta_{2y}'' = -B_2\Phi_{2z}$, $\theta_{2z}'' = B_2\Phi_{2y}$.

На рис. 2 и 3 показано распределение нормальных контактных напряжений, (13), вдоль направлений X и Y соответственно, на разных от них расстояниях.

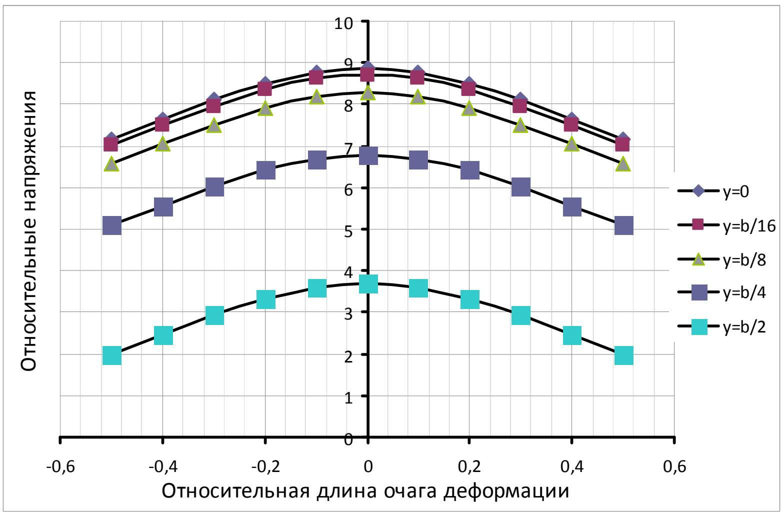

Рис. 2. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности вдоль оси X при $h = 10$ мм, $b = 140$ мм, $f = 0{,}3$, $l = 70$ мм, $y = 0; \frac{b}{16}; \frac{b}{8}; \frac{b}{4}; \frac{b}{2}$

Вдоль осей X и Y напряжения σ_z распределены по выпуклой кривой, что определяется касательными контактными напряжениями τ_{xz} и τ_{yz}.

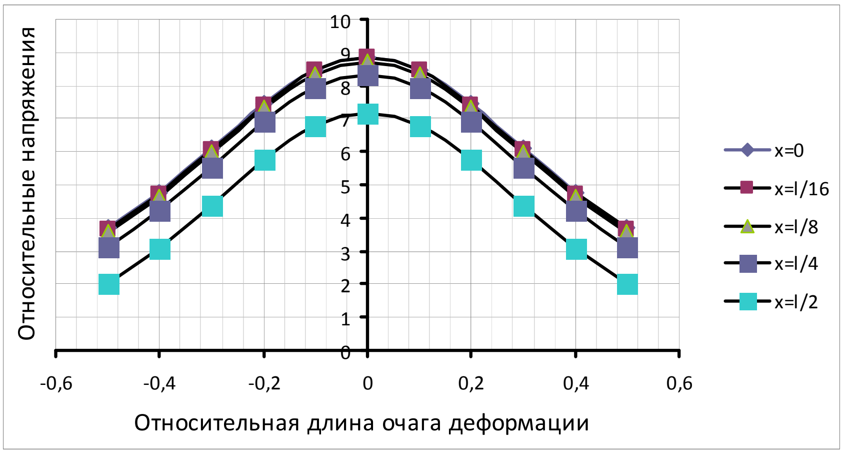

Рис. 3. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности вдоль оси Y при $h = 10$ мм, $b = 140$ мм, $f = 0{,}3$, $l = 70$ мм, $x = 0; \frac{l}{16}; \frac{l}{8}; \frac{l}{4}; \frac{l}{2}$

Причем, на разных расстояниях от осей их значения разные. Чем ближе к боковой или торцевой кромкам, тем они меньше, что соответствует выводам многих работ, включая [7]. На рис. 4, 5 видно, что ширина полосы влияет на величину и характер распределения контактных нормальных напряжений вдоль оси X, при разных значениях фактора формы $\left(\frac{l}{h} = 7, \frac{l}{h} = 1\right)$. С увеличением ширины контактные давления увеличиваются. Необходимо подчеркнуть, что при больших ширинах $(b > 2l)$, величина нормальных напряжений резко возрастает, даже при малых значениях $\frac{l}{h}$, из-за увеличения коэффициента подпора в поперечном направлении. В работе Губкина [9] этот факт подтверждается.

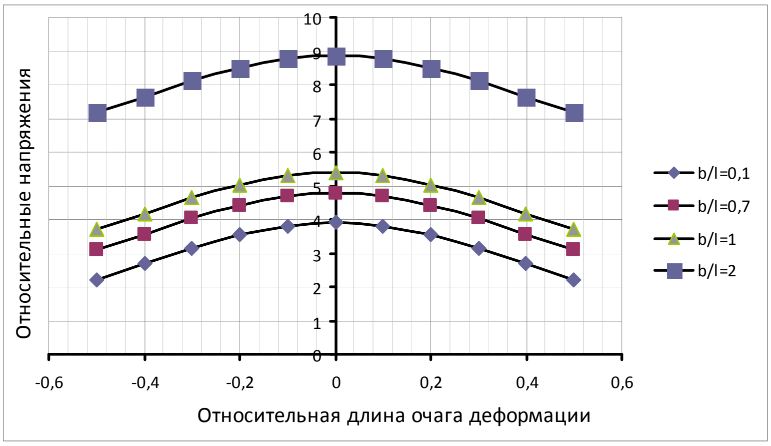

Рис. 4. Влияние ширины полосы на удельное давление при $h = 10$ мм, $l = 70$ мм, $\left(\frac{l}{h} = 7\right)$, $f = 0{,}3$, $b = 10, 50, 70, 140$ мм, $y = 0$

Расчеты показывает, что контактное трение и фактор формы существенным образом влияют на значение напряжения σ_z. С увеличением их величина возрастает.

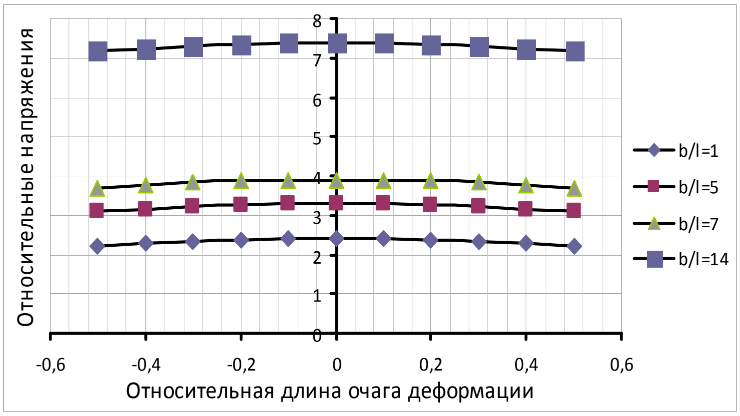

Рис. 5. Влияние ширины полосы на удельное давление при $h = 10$ мм, $l = 10$ мм, $\left(\dfrac{l}{h} = 1\right)$ $f = 0{,}3$, $b = 10, 50, 70, 140$ мм, $y = 0$

ВЫВОДЫ

Поставлена и решена замкнутая пространственная задача теории пластичности в аналитическом виде.

Расчеты показывают, что при осадке прямоугольной в плане заготовки на шероховатых бойках, пространственная эпюра контактных нормальных напряжений является выпуклой вдоль осей *X*, *Y*. Минимальные значения напряжений определяются в углах заготовки.

С увеличением ширины заготовки нормальные контактные напряжения возрастают.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чигиринский В. В. О новых подходах решения задач теории пластичности / В. В. Чигиринский // Обработка металлов давлением : сб. науч. тр. – Краматорск : ДГМА, 2009. – № 1 (20). – С. 41–49.

2. Производство высокоэффективного металлопроката / Чигиринский В. В., Мазур В. Л., Бергеман Г. В., Леготкин Г. И., Слепынин А. Г., Шевченко Т. Г. – Днепропетровск : Дніпро-ВАЛ, 2006. – 265 с. : ил.

3. Чигиринский В. В. Новое решение плоской задачи теории пластичности / В. В. Чигиринский // Научные труды ДонНТУ. – Донецк, 2008. – Выпуск 10 (141). – С. 105–115. – (Серия «Металлургия»).

4. Чигиринский В. В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / В. В. Чигиринский // Изв вузов. Черная металлургия. – 2009. – № 5. – С. 11–16.

5. Чигиринский В. В. Некоторые особенности теории пластичности применительно к процессам ОМД / В. В. Чигиринский // Теория и технология процессов пластической деформации-96 : тр. науч.-техн. конф. – М. : МИСиС, 1997. – С. 568–572.

6. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М. : Машиностроение, 1977. – 422 с.

7. Целиков А. И. Теория расчета усилий в прокатных станах / А. И. Целиков. – М. : Металлургиздат, 1962. – 495 с.

8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 735 с.

9. Губкин С. И. Теория обработки металлов давлением / С. И. Губкин. – М. : Металлургиздат, 1947. – 370 с.

Чигиринский В. В. – д-р техн. наук, проф., зав. каф. ЗНТУ;

Шейко С. П. – канд. техн. наук, доц., докторант ЗНТУ;

Ечин С. М. – студент ЗНТУ.

ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.

E-mail: valerij@zntu.edu.ua

Статья поступила в редакцию 06.03.2013 г.